TE231 Capitulo 6 – Integração Numérica

Prof. Mateus Duarte Teixeira

1. Introdução

- Em determinadas situações, integrais são difíceis, ou mesmo impossíveis de se resolver analiticamente.

- Exemplo: o valor de f(x) é conhecido apenas em alguns pontos, num intervalo [a, b]. Como não se conhece a expressão analítica de f(x), não é possível calcular

$$\int_a^b f(x)dx$$

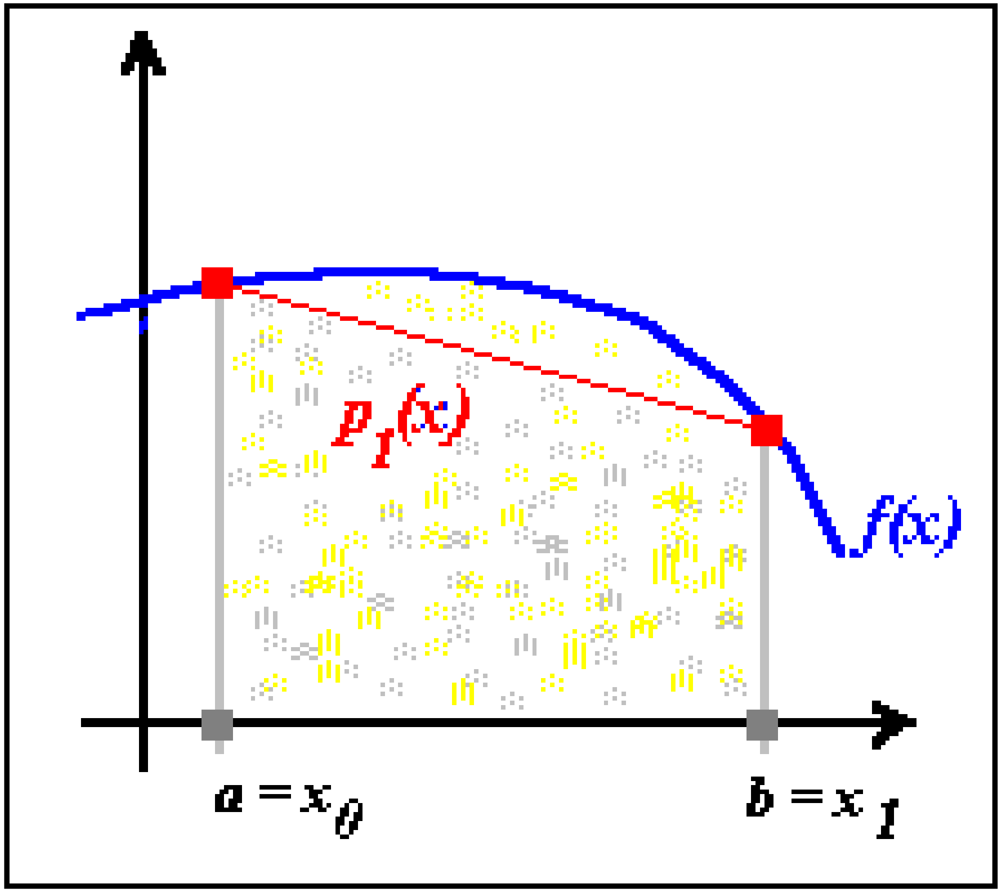
- Forma de obtenção de uma aproximação para a integral de f(x) num intervalo [a, b] ⇨ **Métodos Numéricos.**

1. Introdução

- **Ideia básica da integração numérica** ⇨ substituição da função f(x) por um **polinômio** que a aproxime razoavelmente no intervalo [a, b].

- **Integração numérica de uma função f(x) num intervalo [a,b]** ⇨ cálculo da área delimitada por essa função, recorrendo à interpolação polinomial, como, forma de obtenção de um polinômio – $\mathbf{p_n(x)}$.

1. Introdução



1. Introdução

- As fórmulas terão a expressão abaixo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n),$$
$$x_i \in [a,b], i = 0,1,\ldots,n$$

- **Fórmulas de integração** (fórmulas de quadratura):

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

- x_0 , ... , x_n - pontos conhecidos, pertencentes ao intervalo [a, b] (***nós de integração***).
- A_0 , ... , A_n - coeficientes a determinar, independentes da função *f* (x) (***pesos***).

1. Introdução

- O uso desta técnica decorre do fato de:
  - por vezes, f(x) ser uma função muito difícil de integrar, contrariamente a um polinômio;
  - conhecer-se o resultado analítico do integral, mas, seu cálculo é somente aproximado;
  - a única informação sobre f(x) ser um conjunto de pares ordenados.

2. Métodos de integração numérica mais utilizados

- **Fórmulas de Newton-Cotes Fechadas**
  - Regra dos Trapézios, $x_0=a$ e $x_n=b$.
  - Regra 1/3 de Simpson

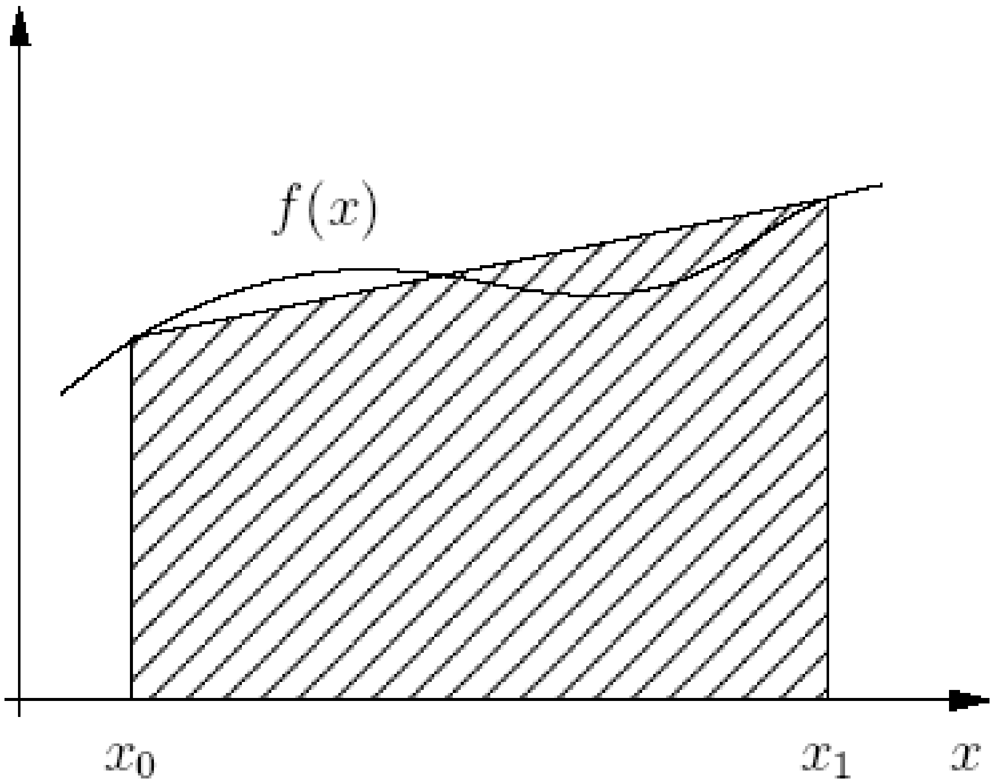
- **Fórmulas de Newton-Cotes Abertas**
  - os x_i têm de pertencer ao intervalo aberto de **a até b**

3. Regra dos Trapézios

- **Regra dos Trapézios Simples** - consiste em considerar um polinômio de primeiro grau que aproxima uma função **f(x)**, ou seja, **n=1**.

- Este polinômio terá a forma $\mathbf{y=a_0 + a_1x}$ e trata-se da equação que une dois pontos: $\mathbf{a=x_0}$ e $\mathbf{b=x_1}$.

Regra dos Trapézios Simples:

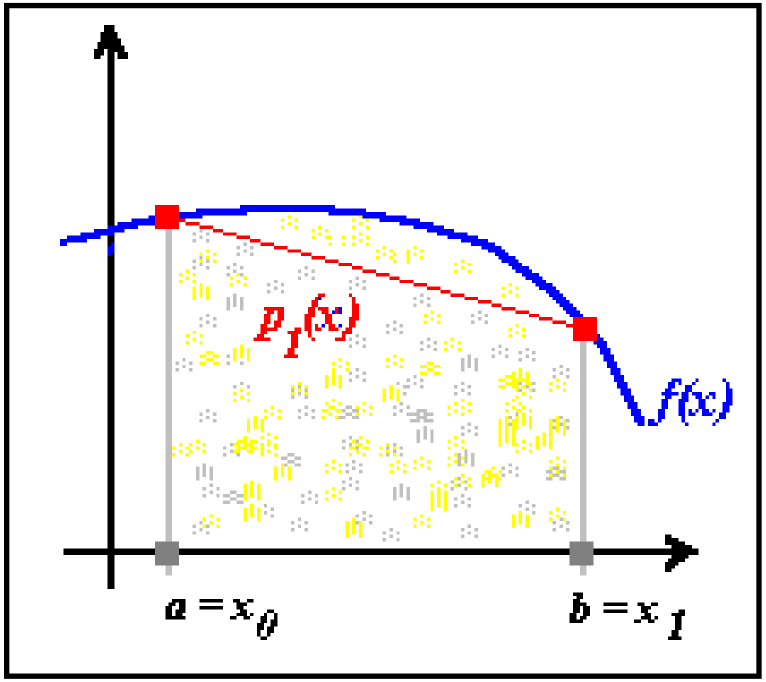


Área do trapézio: A=h . (T+t) /2

- h - altura do trapézio
- t - base menor
- T - base maior

De acordo com a figura:

- h= b – a = x1 – x0
- t = f(b) = f(x1)
- T = f(a) = f(x0)



Logo,

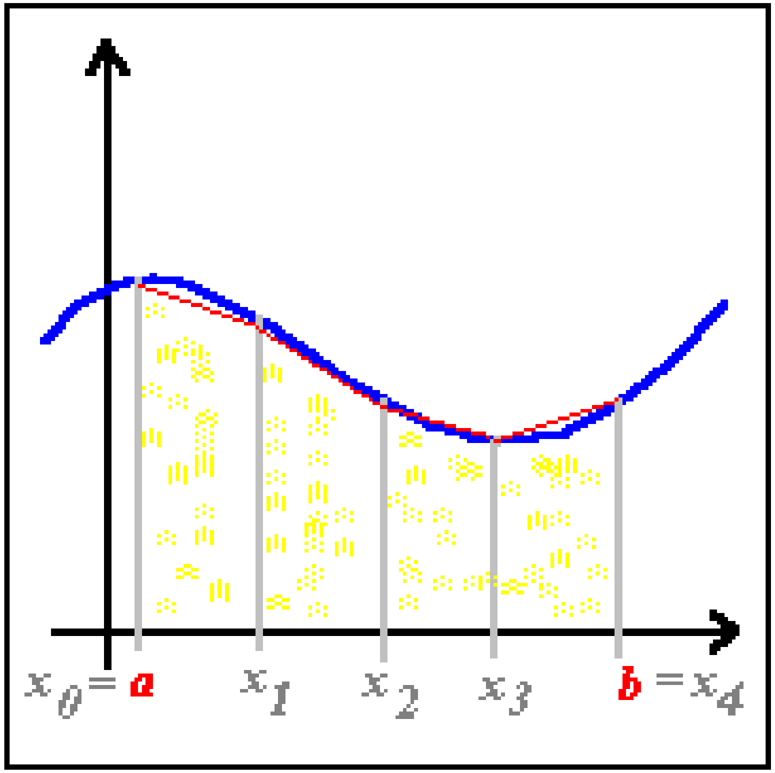
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

- **Intervalo [a, b] relativamente pequeno**
  - aproximação do valor do integral é aceitável.

- **Intervalo [a, b] de grande amplitude**
  - aproximação desfasada.
  - pode-se subdividi-lo em n sub-intervalos, e em cada um a função é aproximada por uma função linear.
  - A amplitude dos sub-intervalos será h=(b-a)/n .
  - A integral no intervalo é dado pela soma dos integrais definidos pelos sub-intervalos.
  - Regra dos trapézios simples aplicada aos sub-intervalos.
  - **Uso da Regra dos Trapézios Composta (Repetida)**: soma da área de n trapézios, cada qual definido pelo seu sub-intervalo.

4. Regra dos Trapézios Composta

- Intervalo [a, b] de grande amplitude.
- Soma da área de **n** trapézios, cada qual definido pelo seu sub-intervalo.



- Fórmula:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\frac{h}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$$
$$+\ldots+\frac{h}{2}\left[f(x_{N-1})+f(x_N)\right]$$

- Só os termos **f(x_0) e f(x_n)** não se repetem, assim, esta fórmula pode ser simplificada em:

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left\{f(x_0)+2\left[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{N-1})\right]+f(x_N)\right\}$$

Exemplo: Estimar o valor de $\int_0^4 (1+x^2)^{-1/2}\,dx$

- **Regra dos Trapézios Simples - 2 pontos** (x_0=0.0 e x_1=4.0)
  I=y0+y1=2x(1.00000+0.24254) **= 2.48508**
- **Regra dos Trapézios Composta - 3 pontos** (x_0=0.0,x_1 =2.0,x_2 =4.0)
  $I=y_0+2y_1+y_2$=1x(1.00000+2x0.44722 + 0.24254) **= 2.1369**
- **Regra dos Trapézios Composta - 9 pontos**
  $I=(0.5/2)x(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+2y_6+2y_7+y_8)$ =**2.0936**
- **A aproximação para 9 pontos é melhor, dado que o valor real é 2.0947.**

x	$y=(1+x^2)^{-1/2}$
0.0	1.00000
0.5	0.89445
1.0	0.70711
1.5	0.55475
2.0	0.44722
2.5	0.37138
3.0	0.31623
3.5	0.27473
4.0	0.24254

Exemplo: Calcule a integral de $f(x)=e^x$ no intervalo [0,1] com 10 subintervalos

$$h=\frac{b-a}{10}=0{,}1$$

$$I=\frac{h}{2}(f(0)+2f(0{,}1)+\ldots+2f(0{,}9)+f(1))$$

$$I=\frac{h}{2}(e^0+2e^{0{,}1}+\ldots+2e^{0{,}9}+e^1)$$

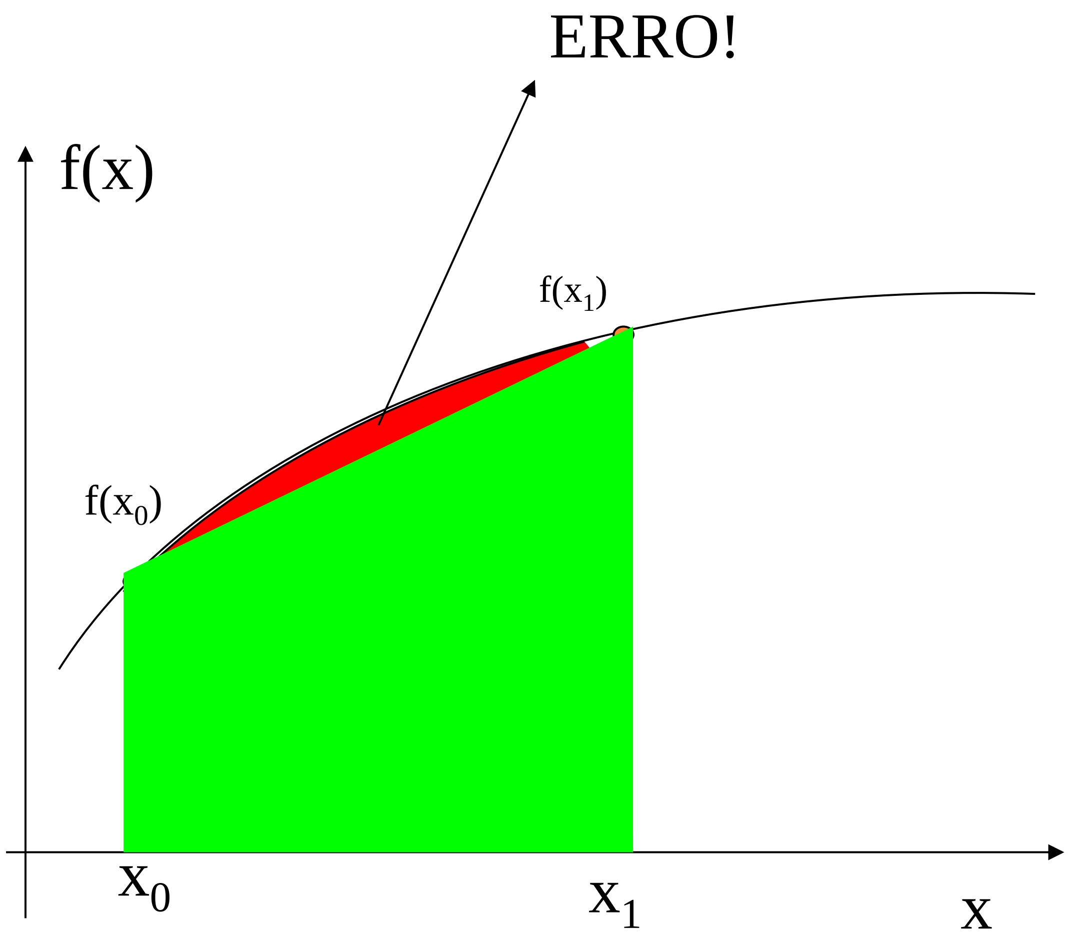
$$I=1{,}72$$

- Erro da Regra dos Trapézios simples

$$E(f)=I(f)-T(f)=I(f)-I(p1)=I(f-p1)$$

- T(f) - valor da integral obtida pela regra dos trapézios.
- I(f) - valor da integral obtida pela integração de f(x).

- Erro da Regra dos Trapézios simples



- Não é possível calcular exatamente, $f''(\xi_i)$ visto que não se conhece o ponto ξ . Quando for possível, calcula-se um limitante superior para o erro.
- Tem-se: $$\boxed{E_N(f) = -\frac{Nh^3 f''(\xi_i)}{12}}$$
- Sendo **f´´(x)** contínua em [a, b] então existe

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right|$$

- Assim,

$$\boxed{\left| E_{TR} \right| \le \frac{Nh^3 M_2}{12}}$$