

TE342 – Fundamentos de Comunicação

Sinais e Sistemas de Comunicação

Evelio M. G. Fernández

19 de fevereiro de 2019

Informação sobre a disciplina

- Terças e Quintas feiras das 16:30 às 18:20 horas
- Professor: Evelio Martín García Fernández
- Gabinete 9, Tel: 3361-3221, 99194-3363
- e-mail: evelio@eletrica.ufpr.br
- Página da Disciplina na Internet:

www.eletrica.ufpr.br/evelio/TE060/index.htm

Notes

Notes

1 Sinais e Sistemas de Comunicação;

- Representação de Sinais Determinísticos no Domínio do Tempo e no Domínio da Frequência;
- Sinais Aleatórios. Revisão de Processos Estocásticos;
- Transmissão de Sinais através de Sistemas Lineares;
- Sinais em Quadratura;

2 Sistemas de Modulação de Onda Contínua;

- Modulação de Amplitude;
- Modulação Angular;
- Efeito do Ruído em Sistemas com Modulação de Onda Contínua;

3 Sistemas de Modulação Digital;

- Modulação de Pulso;
- Transmissão Digital em Banda Base;
- Transmissão Digital em Banda Passante.

Notes

- Simon Haykin, *Sistemas de Comunicação*, 4ª Edição, Bookman, 2004.
- Simon Haykin e Michael Moher, *Sistemas de Comunicação*, 5ª Edição, Bookman, 2009.
- Simon Haykin e Michael Moher, *Introdução aos Sistemas de Comunicações*, 2ª Edição, Bookman, 2008.
- Leon W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 7th Edition, Prentice Hall, 2007.
- Bernard Sklar, *Digital Communications*, 2nd Edition, Prentice Hall 2004.

Notes

- 1ª Prova (P1): 26/03/2019 16:30 Horas
- 2ª Prova (P2): 02/05/2019 16:30 Horas
- 3ª Prova (P3): 13/06/2019 16:30 Horas
- Provas de 2da Chamada: 18/06/2019 16:30 Horas
- Média Final = $(P1 + P2 + P3)/3$
- Exame Final: 27/06/2019 16:30 Horas

Nas provas e no exame será permitido consultar 01 (um) livro (NÃO PODE SER FOTOCÓPIA) e uma folha A4 manuscrita.

Calendário

Data	Atividade	Observações
19/02/2019	Aula 1	
21/02/2019	Aula 2	
26/02/2019	Aula 3	
28/02/2019	Aula 4	
05/03/2019	-	Não haverá aula – Carnaval
07/03/2019	Aula 5	
12/03/2019	Aula 6	
14/03/2019	Aula 7	
19/03/2019	Aula 8	
21/03/2019	Aula 9	
26/03/2019	Aula 10	Prova 1
28/03/2019	Aula 11	
02/04/2019	Aula 12	
04/04/2019	Aula 13	
09/04/2019	Aula 14	
11/04/2019	Aula 15	
16/04/2019	Aula 16	
18/04/2019	-	Não haverá aula

Notes

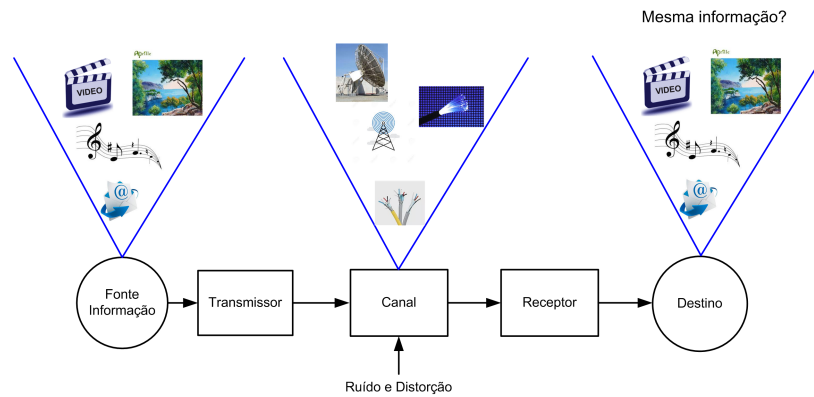
Notes

Calendário

Data	Atividade	Observações
23/04/2019	Aula 17	
25/04/2019	Aula 18	
30/04/2019	Aula 19	
02/05/2019	Aula 20	Prova 2
07/05/2019	Aula 21	
09/05/2019	Aula 22	
14/05/2019	Aula 23	
16/05/2019	Aula 24	
21/05/2019	-	SEATEL
23/05/2019	-	SEATEL
28/05/2019	Aula 25	
30/05/2019	Aula 26	
04/06/2019	Aula 27	
06/06/2019	Aula 28	
11/06/2019	Aula 29	
13/06/2019	Aula 30	Prova 3

Notes

Elementos de um Sistema de Comunicação

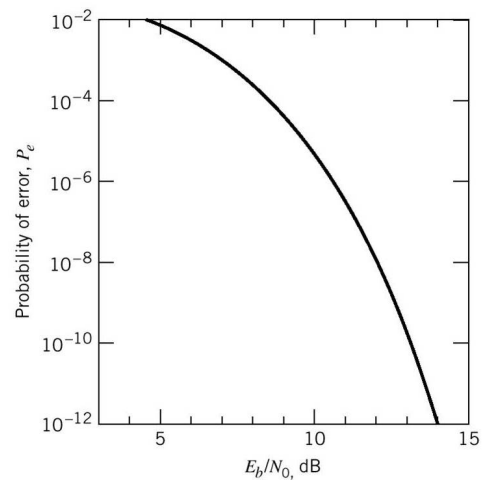


Notes

- Potência Transmitida → (SNR: *Signal-to-Noise Ratio*, C/N , S/N , E_b/N_0)
 - Eficiência de Potência → Taxa de Erro de Bits (BER: *Bit Error Rate*)
- Largura de Banda → Eficiência Espectral
- Ruído
- Atenuação
- Distorção
- Interferências

Notes

Eficiência de Potência → Taxa de Erro de Bits



Notes

Fontes de Informação

- Fala, música, imagens, dados de computador, etc.
- Caracterizada em termos do sinal que carrega a informação

Sinal

Função do tempo que contém informação sobre o comportamento de algum fenômeno

Classificação de Sinais

- Sinais Determinísticos
- Sinais Aleatórios
- Sinais Periódicos
- Sinais não Periódicos
- Sinais Contínuos
- Sinais Discretos
- Sinais de Energia
- Sinais de Potência

Notes

Notes

Classificação de Sinais

- **Sinais Determinísticos**

- Não há incerteza em relação com o seu valor em qualquer instante de tempo. Ex: $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$, A, f_0, ϕ_0 : constantes conhecidas.

- **Sinais Aleatórios**

- Ha algum grau de incerteza sobre o seu valor. Observado durante um longo período de tempo \Rightarrow **processo aleatório**:
exibe determinadas regularidades que podem ser descritas em termos de probabilidades e médias estatísticas.

Classificação de Sinais

- **Sinais Periódicos:** $x(t) = x(t + T_0)$, $-\infty < t < \infty$

- **Sinais não Periódicos:** Ex: pulsos, sinais digitais

- **Sinal Contínuo (Analogico):**

- $x(t) \rightarrow$ função contínua do tempo \Rightarrow é unicamente definida para todo t

- **Sinal Discreto:**

- $x[nT]$ (ou simplesmente $x[n]$), $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \rightarrow$ somente existe em valores discretos de tempo
- **Sinal Digital:** tempo e amplitude têm valores discretos

Notes

Notes

Sinais de Energia e Sinais de Potência

- Sinal elétrico, $x(t)$: tensão, $v(t)$, ou corrente, $i(t)$, com potência instantânea $p(t)$ dada por:

$$p(t) = |v(t)|^2/R = |i(t)|^2 R. \quad \text{Supondo } R = 1\Omega, \Rightarrow p(t) = |x(t)|^2$$

$$\text{para } x(t) \text{ real} \Rightarrow p(t) = x^2(t)$$

- A energia dissipada durante o intervalo de tempo $(-T/2, T/2)$ por um sinal real com potência instantânea $p(t)$ é,

$$E_X^T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

Sinais de Energia e Sinais de Potência

- A potência média dissipada pelo sinal durante esse intervalo é,

$$P_X^T = \frac{1}{T} E_X^T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

Potência Média

É a taxa à qual a energia é liberada ou consumida. → Determina a tensão (ou corrente) que deve ser aplicada a um transmissor, intensidade de campo magnético, ...

Notes

Notes

- **Sinais de Energia:** $0 < E_X < \infty$. Onde,

$$E_X = \lim_{T \rightarrow \infty} E_X^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

- **Sinais de Potência:** $0 < P_X < \infty$. Onde,

$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} P_X^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

Lembrar que: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\cdot] dt = \langle [\cdot] \rangle \rightarrow$ média temporal.

Para sinais periódicos: $\langle [\cdot] \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}+a}^{\frac{T_0}{2}+a} [\cdot] dt$

Notes

Energia e Potência Média de Sinais

	Tempo contínuo	Tempo discreto
Energia total de sinais não periódicos	$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$
Potência média de sinais não periódicos	$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) ^2 dt$	$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$
Potência média de sinais periódicos	$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) ^2 dt$	$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] ^2$

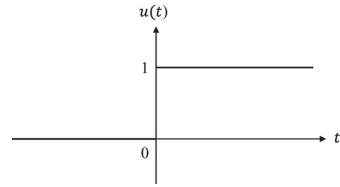
Sinais de Energia: $0 < E_X < \infty$ e $P = 0$

Sinais de Potência: $0 < P_X < \infty$ e $E = \infty$.

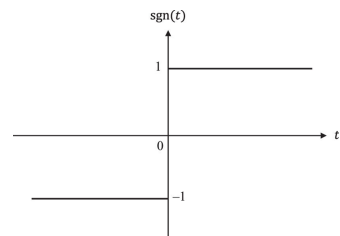
Notes

Sinais Elementares

- **Degrau unitário:** $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$



- **Função Sinal:** $\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$

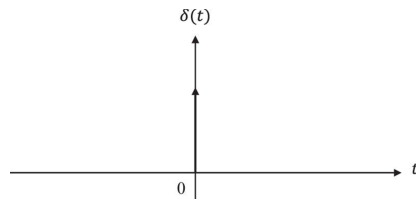


Notes

Sinais Elementares

- **Pulso retangular:** $\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{fora} \end{cases}$

- **Impulso unitário:**



① $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

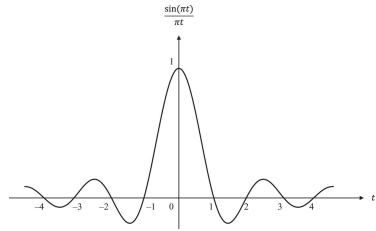
② $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

③ $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$

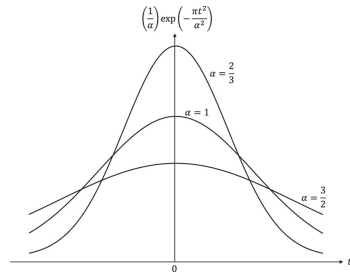
④ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0)$

Notes

- **Função sinc:** $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$



- **Pulso Gaussiano:** $g(t) = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\pi t^2}{\alpha^2}\right)$, $\alpha > 0$



Notes

Sinais Fisicamente Realizáveis

Exercício 1: Determine se os seguintes sinais são de energia ou de potência.

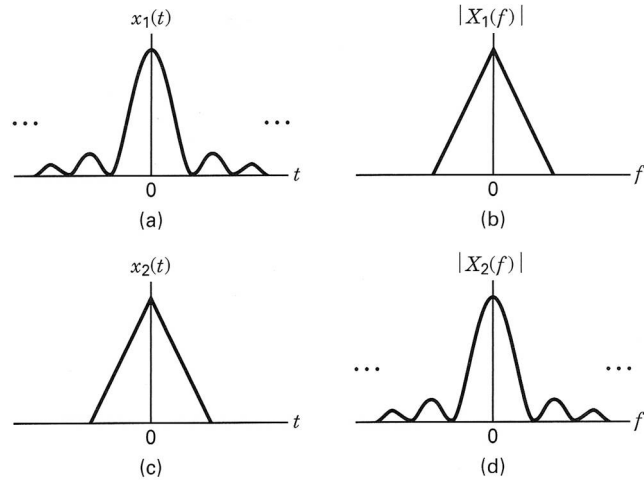
- $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$;
- $x_2(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$;
- $x_3(t) = \cos(t)$.

Sinais (formas de onda) fisicamente realizáveis satisfazem as seguintes condições:

- Têm valores significativos de amplitude diferentes de zero sobre um intervalo finito de tempo;
- O espectro de frequências tem valores significativos sobre um intervalo finito de frequências;
- São funções contínuas do tempo;
- Têm um valor pico finito;
- Formas de onda fisicamente realizáveis somente têm valores reais.

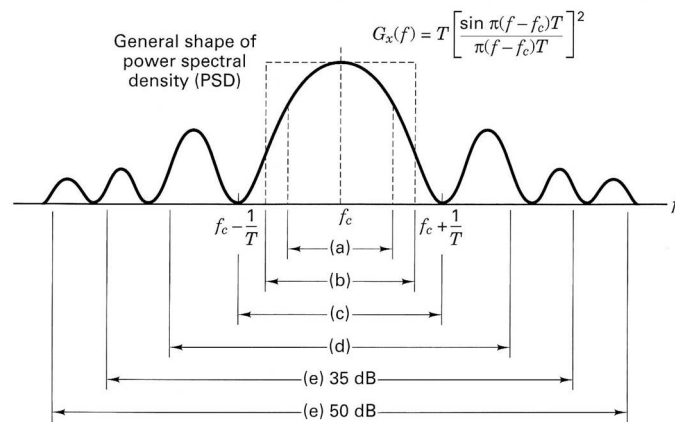
Notes

Dependência Tempo-Frequência



Notes

O Dilema da Largura de Banda



Bandwidth of digital data. (a) Half-power. (b) Noise equivalent. (c) Null to null. (d) 99% of power. (e) Bounded PSD (defines attenuation outside bandwidth) at 35 and 50 dB.

Notes

Série de Fourier (forma trigonométrica)

Seja: $g_{T_0}(t) \rightarrow$ sinal periódico com período $T_0 = \frac{1}{f_0}$:

$$g_{T_0}(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)], \text{ onde:}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t) dt,$$

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Série de Fourier (forma exponencial)

$$g_{T_0}(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - j b_n) \exp(j 2\pi n f_0 t) + (a_n + j b_n) \exp(-j 2\pi n f_0 t)]$$

$$\text{Seja, } c_n = \begin{cases} a_n - j b_n, & n > 0 \\ a_0, & n = 0 \\ a_n + j b_n, & n < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j 2\pi n f_0 t)$$

onde,

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t) \exp(-j 2\pi n f_0 t) dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Notes

Notes

Algumas propriedades da série exponencial de Fourier

- 1 Se $g(t)$ é real,

$$c_n = c_{-n}^*, \quad \arg(c_n) = -\arg(c_{-n}), \quad c_n = |c_n| \exp[\arg(c_n)]$$

- 2 Se $g(t)$ é real e par [isto é, $g(t) = g(-t)$],

$$\Im[c_n] = 0$$

- 3 Se $g(t)$ é real e ímpar [isto é, $g(t) = -g(-t)$],

$$\Re[c_n] = 0$$

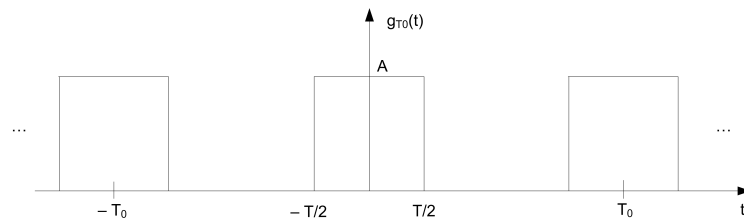
- 4 Teorema de Parseval:

$$\frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} |g(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Notes

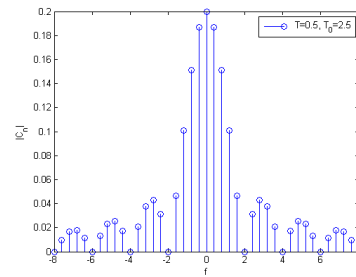
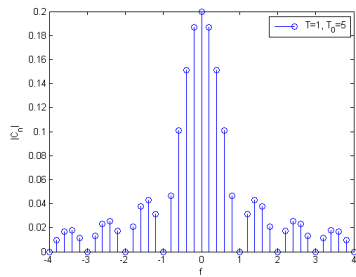
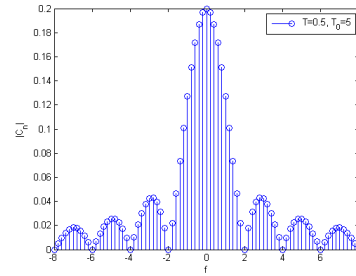
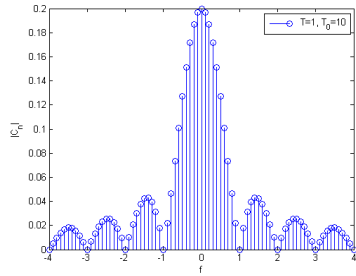
Exemplo

Determinar o espectro de amplitudes de um trem periódico de pulsos retangulares de amplitude A , duração T e período T_0



$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} A \exp(-j2\pi n f_0 t) dt = \frac{A}{T_0} \left[-\frac{1}{j2\pi n f_0} \exp(-j2\pi n f_0 t) \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{TA}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{nT}{T_0}\right) \end{aligned}$$

Notes



Notes

Transformada de Fourier

$g(t) \Rightarrow G(f)$

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df$$

$$G(f) = X(f) + jY(f)$$

$$G(f) = |G(f)|e^{j\theta(f)}$$

$$|G(f)| = \sqrt{X^2(f) + Y^2(f)} \text{ e } \theta(f) = \tan^{-1} \left(\frac{Y(f)}{X(f)} \right)$$

Notes

1 Se $g(t)$ é real, então

$$\begin{aligned} G(-f) &= G^*(f) \\ |G(-f)| &= |G(f)| \\ \theta(-f) &= -\theta(f) \end{aligned}$$

2 Teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f)G_2^*(f) df$$

Se $g_1(t) = g_2(t) = g(t) \Rightarrow$ Teorema da Energia de Rayleigh:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df.$$

Notes

Pares de Transformadas de Fourier

Fourier Transform Pairs

Pair Number	$x(t)$	$X(f)$	Comments on Derivation
1.	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc} \pi f$	Direct evaluation
2.	$2W \operatorname{sinc} 2Wt$	$\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$	Duality with pair 1, Example 4-7
3.	$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc}^2 \pi f$	Convolution using pair 1
4.	$\exp(-\alpha t)u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha + j2\pi f}$	Direct evaluation
5.	$t \exp(-\alpha t)u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j2\pi f)^2}$	Differentiation of pair 4 with respect to α
6.	$\exp(-\alpha t), \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$	Direct evaluation
7.	$e^{-\pi\sigma^2 t^2}$	$\frac{1}{\sigma} e^{-\pi f^2/\sigma^2}$	Direct evaluation
8.	$\delta(t)$	1	Example 4-9
9.	1	$\delta(f)$	Duality with pair 7
10.	$\delta(t - t_0)$	$\exp(-j2\pi f t_0)$	Shift and pair 7
11.	$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f - f_0)$	Duality with pair 9
12.	$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$	Exponential representation of cos and sin and pair 10
13.	$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$	
14.	$u(t)$	$(j2\pi f)^{-1} + \frac{1}{2}\delta(f)$	Integration and pair 7
15.	$\operatorname{sgn} t$	$(j\pi f)^{-1}$	Pair 8 and pair 13 with superposition
16.	$\frac{1}{\pi t}$	$-j \operatorname{sgn}(f)$	Duality with pair 14
17.	$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda$	$-j \operatorname{sgn}(f)X(f)$	Convolution and pair 15
18.	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s)$	$f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_s)$ $f_s = T_s^{-1}$	Example 4-10

Notes

Propriedades da Transformadas de Fourier

Fourier Transform Theorems*

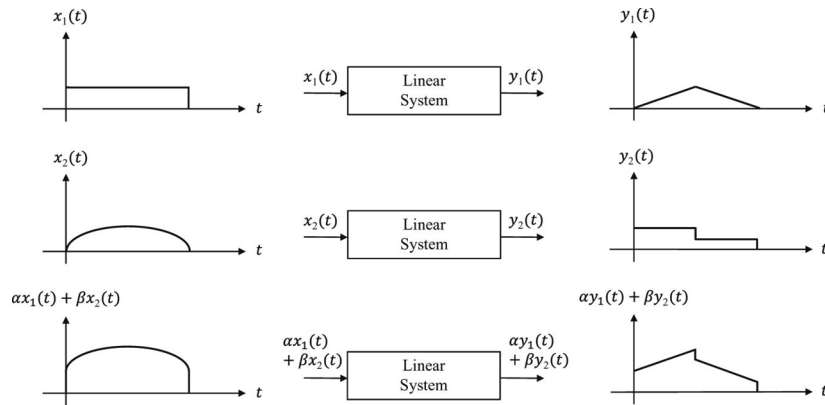
Name of Theorem		
1. Superposition (a_1 and a_2 arbitrary constants)	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(f) + a_2X_2(f)$
2. Time delay	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
3a. Scale change	$x(at)$	$ a ^{-1}X\left(\frac{f}{a}\right)$
b. Time reversal	$x(-t)$	$X(-f) = X^*(f)$
4. Duality	$X(t)$	$x(-f)$
5a. Frequency translation	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(f - f_0)$
b. Modulation	$x(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$
6. Differentiation	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
7. Integration	$\int_{-\infty}^t x(t') dt'$	$(j2\pi f)^{-1} X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$
8. Convolution	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - t')x_2(t') dt'$ $= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t')x_2(t - t') dt'$	$X_1(f)X_2(f)$
9. Multiplication	$x_1(t)x_2(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X_1(f - f')X_2(f') df'$ $= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f')X_2(f - f') df'$

* $\omega_0 = 2\pi f_0$; $x(t)$ is assumed to be real in 3b.

Notes

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

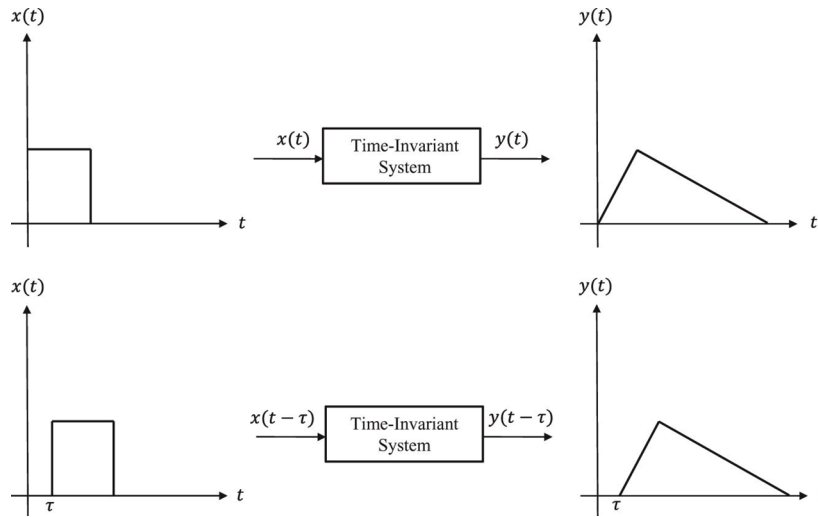
Linearidade:



Notes

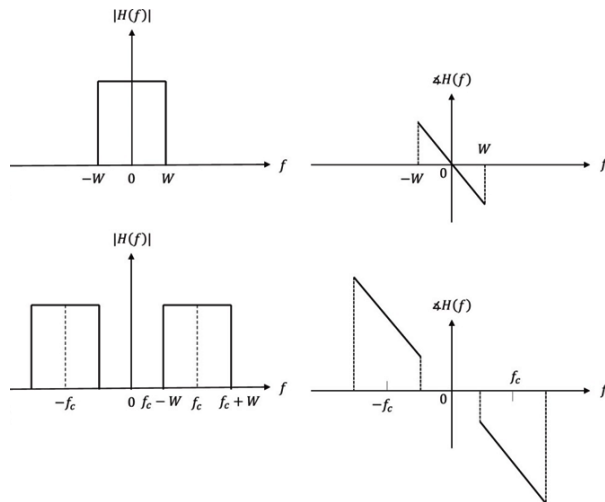
Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Invariância no tempo:

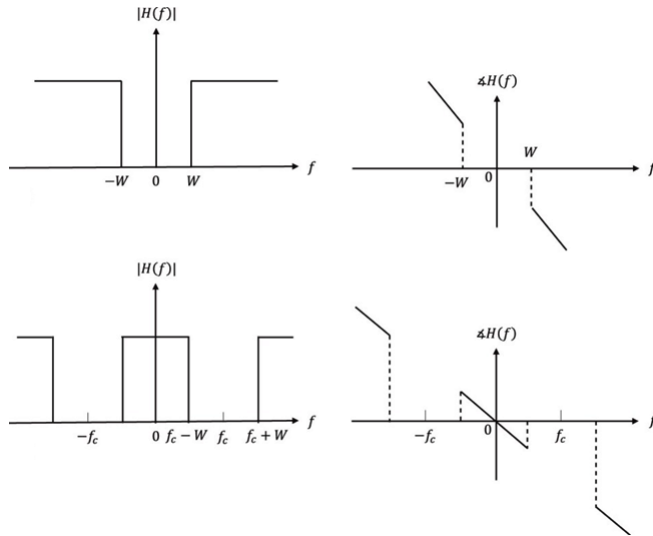


Notes

Sistemas LIT - Filtros Ideais

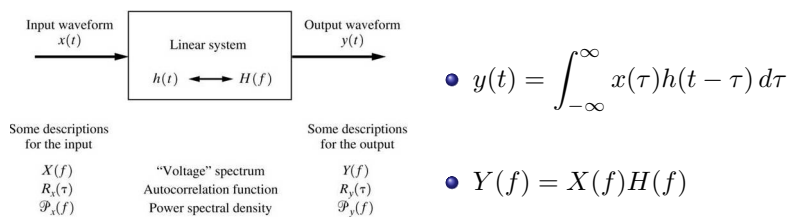


Notes



Notes

Transmissão de Sinais através de Sistemas Lineares



Notes

Integral de Convolução

Integral ponderada (de acordo com $h(t)$) sobre a história passada do sinal de entrada onde,

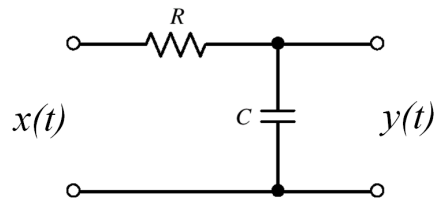
- τ – tempo de excitação;
- t – tempo de resposta;
- $(t - \tau)$ – memória do sistema.

Exercícios

Exercício 2: Considere o sinal $g(t) = \frac{2a}{(2\pi t)^2 + a^2}$, $a > 0$.

Determine o valor de B tal que a faixa de frequências $[-B, B]$ contenha 99% da energia total de $g(t)$.

Exercício 3: Considere o circuito RC mostrado na figura. Determine $H(f)$ e $h(t)$.



Exercício 4

Considere o sinal $x(t) = 10 \cos(2\pi f_1 t) + 5 \cos(4\pi f_1 t)$ onde $f_1 = 2\text{kHz}$. Este sinal é enviado através de um sistema linear invariante no tempo com resposta impulsiva $h(t) = 1$ para $t \in [0, 1\text{ms}]$ e zero fora desse intervalo. Seja $y(t)$ a saída do sistema linear. Determine:

- A transformada de Fourier do sinal $x(t)$;
- A potência média de $x(t)$;
- A função de transferência do sistema, esboçando a resposta de amplitude;
- O sinal de saída, $y(t)$;
- A potência média do sinal de saída $y(t)$.

Notes

Notes

- Variável aleatória, X : número que descreve o valor de uma amostra de um experimento aleatório;
- Função de distribuição cumulativa (cdf): $F_X(x) = \mathcal{P}[X \leq x]$;
- Função densidade de probabilidade (pdf): $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$;
- $\mathcal{P}[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

Médias Estatísticas (Momentos)

Momentos de ordem n : $E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx$

- $n = 1 \rightarrow E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \mu_X$ (média)
- $n = 2 \rightarrow E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$ (valor médio médio quadrático)

Momentos centrais de ordem n : $E[(X - \mu_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^n f_X(x) dx$

- $n = 1 \rightarrow E[(X - \mu_X)] = 0$
- $n = 2 \rightarrow E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$ (variância, σ_X^2)
 - $\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$

Notes

Notes

Exemplo

Seja V uma variável aleatória contínua com CDF dada por:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < -5, \\ (v+5)^2/144, & -5 \leq v < 7, \\ 1, & v \geq 7. \end{cases}$$

Determine:

- a) $E[V]$;
- b) σ_V^2 ;
- c) $E[V^3]$.

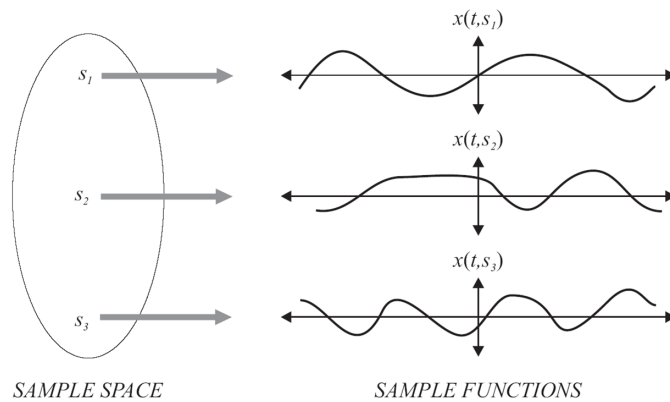
Notes

Duas Variáveis Aleatórias

- $F_{X,Y}(x,y) = \mathcal{P}[X \leq x, Y \leq y]$;
- $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$;
- $\mathcal{P}[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(x,y) dx dy$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$.

Notes

Processo Aleatório (ou Estocástico), $X(t)$: Função aleatória do tempo para modelar formas de onda desconhecidas.



Notes

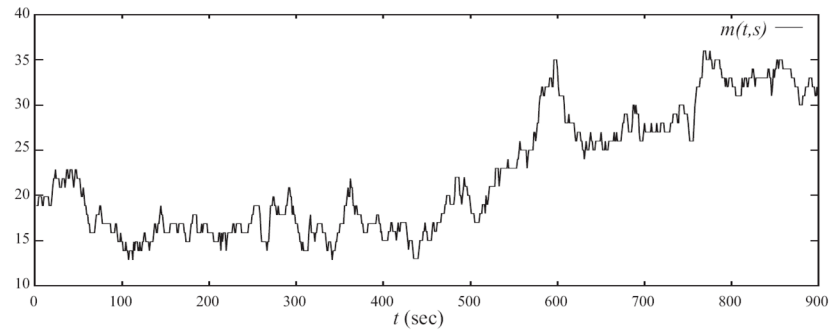
Processos Estocásticos – Definições

- **Processo Estocástico, $X(t)$:** Consiste de um experimento com uma medida de probabilidade $\mathcal{P}[\cdot]$ definida num espaço amostral S e uma função que atribui uma função do tempo $x(t, s)$ a cada realização (função amostra) s no espaço amostral do experimento.
- **Função amostra $x(t, s)$:** Função do tempo associada com o resultado s de um experimento (**signal aleatório**).
- **Ensemble:** Conjunto de todas as possíveis funções do tempo que podem resultar de um experimento.

Notes

Exemplo

Registro, $M(t)$, do número de chamadas em andamento contabilizadas num comutador telefônico a cada segundo sobre um intervalo de 15 minutos:

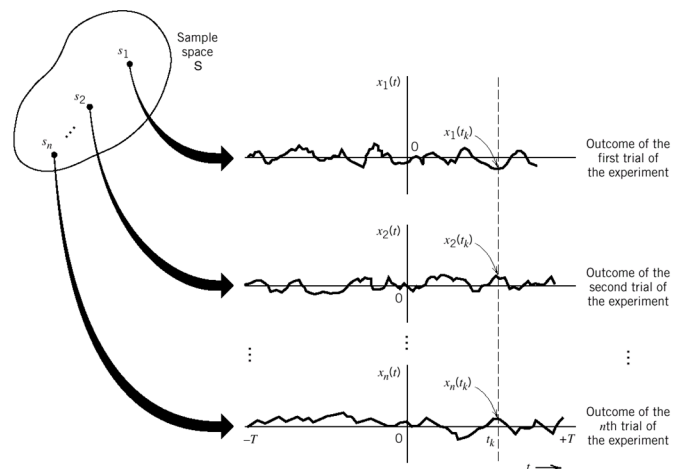


Média de ensemble: Número médio de chamadas em andamento em, por exemplo, $t = 403$ segundos.

Média temporal: Número médio de chamadas em andamento durante um determinado intervalo de 15 minutos.

Notes

Processo Aleatório



Notes

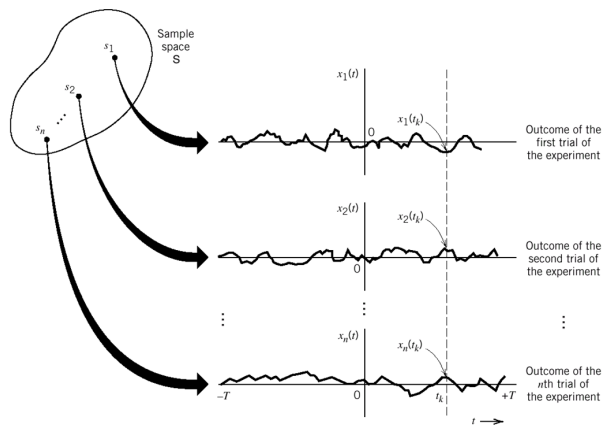
- Um processo aleatório, observado num instante de tempo é uma variável aleatória;
- Processo Aleatório: conjunto indexado de V.A. onde o índice é o tempo;
- Para uma V.A: o resultado de um experimento aleatório é associado a um número;
- Para um processo aleatório: o resultado de um experimento aleatório é associado a uma forma de onda que é uma função do tempo.

Notes

Processos Aleatórios: Caracterização Estatística

Função de Distribuição Conjunta:

$$F_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$



Notes

- O **valor esperado** de um processo estocástico $X(t)$ é a função determinística do tempo

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx$$

- A função de **autocorrelação** do processo estocástico $X(t)$ é

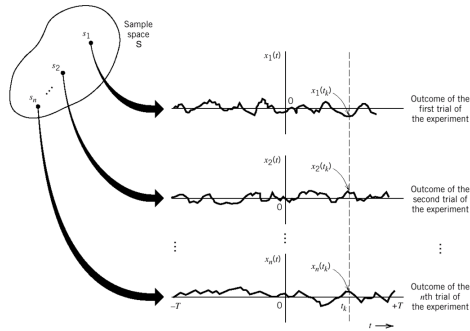
$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Exercício 5

Dado um processo aleatório $X(t)$ com valor esperado $\mu_X(t)$ e autocorrelação $R_X(t_1, t_2)$ considere a observação de $Y(t) = X(t) + N(t)$ onde $N(t)$ é um processo aleatório de ruído com $\mu_N(t) = 0$ e autocorrelação $R_N(t_1, t_2)$. Supondo que o processo de ruído é independente de $X(t)$, determine o valor esperado e a autocorrelação de $Y(t)$.

Notes

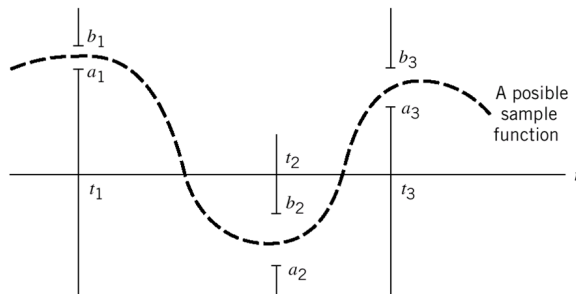
Notes



Processo Aleatório Estacionário (no sentido estrito): A sua caracterização estatística é independente do tempo em que a observação do processo é iniciada:

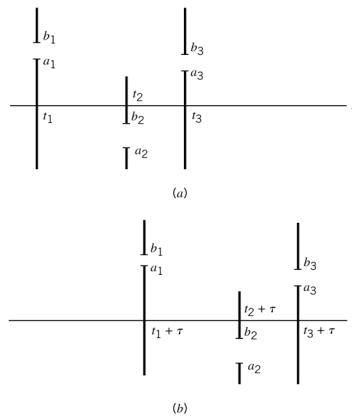
$$F_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)\dots X(t_k+\tau)}(x_1, x_2, \dots, x_k) = F_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Notes



Questão: Avaliar a probabilidade de obtermos uma função amostra $x(t)$ de um processo aleatório $X(t)$ que 'passe' através deste conjunto de janelas de amplitude.

Notes

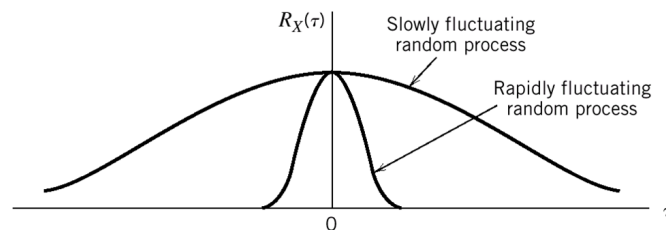


Notes

Propriedades de Processos Estacionários

- Se $X(t)$ é um processo aleatório estacionário, então $Y(t) = aX(t) + b$ é também um processo estacionário;
- $\mu_X(t) = \mu_X$;
- $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau)$, onde $\tau = t_2 - t_1$;
- $X(t)$ é um processo estocástico estacionário no sentido amplo se para todo t ,

$$E[X(t)] = \mu_X \text{ e } R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau).$$



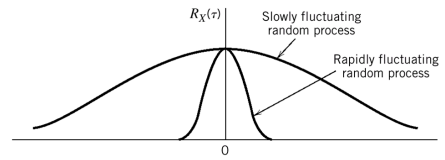
Notes

Propriedades da Função de Autocorrelação

1 $R_X(0) = E[X^2(t)]$

2 $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

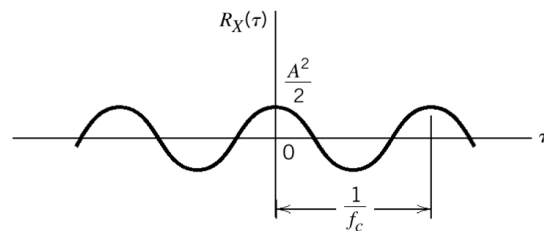
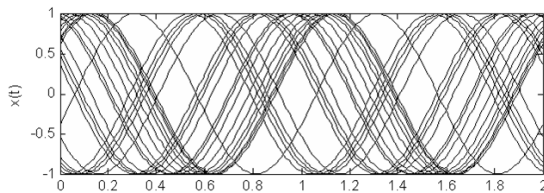
3 $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$



$R_X(\tau)$ → descreve a interdependência de duas variáveis aleatórias obtidas observando-se um processo aleatório $X(t)$ em instantes de tempo τ segundos separados.

Exemplo: Onda Senoidal com Fase Aleatória

Considere o processo aleatório $X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta)$, onde Θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi]$. Determine o valor esperado e a autocorrelação deste processo.



Notes

Notes

Médias Temporais de Funções Amostra:

- $\bar{X}(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$
- $\overline{X^2}(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt$
- $R_X(\tau, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t) dt$

O processo $X(t)$ é **ergódico para a média** se,

- $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{X}(T) = \mu_X$
- $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}[\bar{X}(T)] = 0$

O processo $X(t)$ é **ergódico na função de autocorrelação** se,

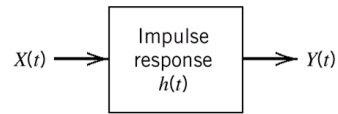
- $\lim_{T \rightarrow \infty} R_X(\tau, T) = R_X(\tau)$
- $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}[R_X(\tau, T)] = 0$

Exemplo: Considere o processo $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$, onde Θ é uma variável aleatória com densidade uniforme no intervalo $[0, 2\pi]$, e A é uma V. A. discreta, sendo $\mathcal{P}[A = 1] = \mathcal{P}[A = 2] = \frac{1}{2}$.

- Calcule $E[X(t)]$, $R_X(t_1, t_2)$, e $\sigma_X^2(t)$.
- Esse processo é ergódico na média? E na autocorrelação?

Notes

Notes



- $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)X(u) du$
- $E[Y(t)] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u) du \right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)E[X(t-u)] du$

Se $X(t) \rightarrow$ estacionário no sentido amplo:

- $\mu_Y = E[Y(t)] = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u) du = \mu_X H(0)$
- $R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \int_{-\infty}^{\infty} h(v)R_X(\tau+u-v)dvdu$

Densidade Espectral de Potência

Seja $X_T(f) = \int_{-T}^T x(t)e^{-j2\pi ft} dt$ a transformada de Fourier da versão truncada de uma função amostra $x(t)$ de um processo aleatório estacionário no sentido amplo $X(t)$.

Densidade Espectral de Potência:

$$S_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [|X_T(f)|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\left| \int_{-T}^T x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 \right]$$

Teorema de Wiener-Khintchine

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)e^{j2\pi f\tau} df$$

Notes

Notes

1 $S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau$

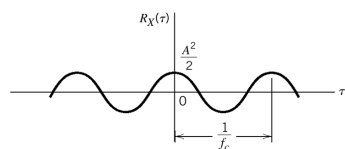
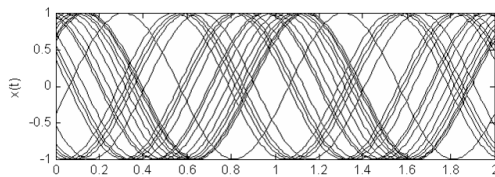
2 $E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$

3 $S_X(f) \geq 0$

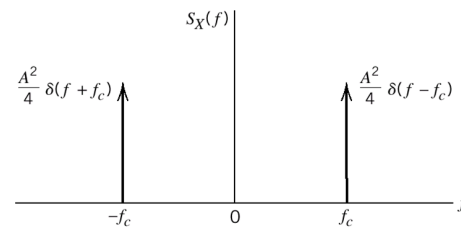
4 $S_X(-f) = S_X(f)$ se o processo aleatório for real

Notes

Exemplo: Onda senoidal com fase aleatória



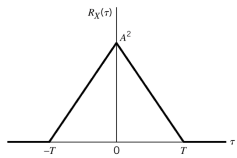
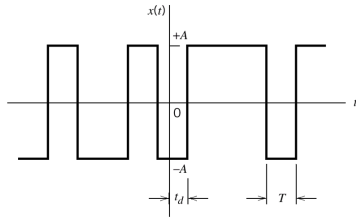
$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau)$$



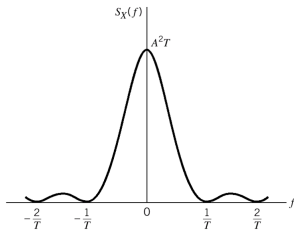
$$S_X(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

Notes

Exemplo: Sequência Binária Aleatória



$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2 \left[1 - \frac{|\tau|}{T} \right], & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| \geq T \end{cases}$$



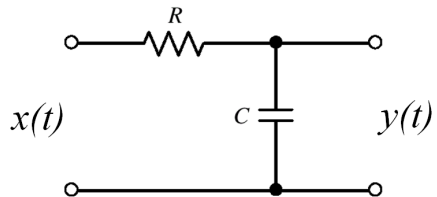
$$S_X(f) = A^2 T \operatorname{sinc}^2(fT)$$

Notes

Processamento de Sinais Aleatórios no Domínio da Frequência

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

Exercício 6: Uma função amostra de processo aleatório estacionário no sentido amplo $X(t)$ com função de autocorrelação $R_X(\tau) = e^{-b|\tau|}$ é o sinal de entrada de um filtro RC passa-baixas. Supondo $b > 0$ e $b \neq 1$, determine $S_Y(f)$ e $R_Y(\tau)$. Determine a potência média do processo de saída.



Notes

Processos Gaussianos

- 1 $X(t)$ é um processo Gaussiano se $\mathbf{X} = [X(t_1) \dots X(t_k)]'$ é um vetor Gaussiano.
- 2 Se $X(t)$ é um processo Gaussiano estacionário no sentido amplo, então $X(t)$ é um processo Gaussiano estacionário.
- 3 Se as V.A.s $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ de um processo Gaussiano não são correlacionadas, ou seja, se

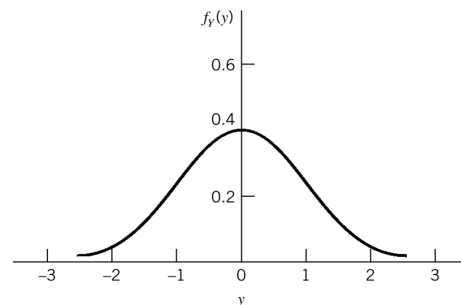
$$E[(X(t_k) - \mu_{X(t_k)})(X(t_i) - \mu_{X(t_i)})] = 0, \quad i \neq k$$

então essas V.A.s são estatisticamente independentes.

- 4 Seja $X(t)$ um processo Gaussiano na entrada de um sistema linear invariante no tempo, então o processo na saída do sistema continua sendo Gaussiano.

Notes

Processos Gaussianos



$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left[-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]$$

Teorema do Limite Central

O efeito soma devido a um grande número de causas independentes tende a um processo Gaussiano:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n \approx \text{Gaussiana para } n \rightarrow \infty$$

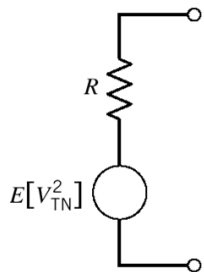
Notes

Ruído

Sinais indesejáveis que perturbam a transmissão e o processamento de sinais no receptor e que são incontrolláveis.

- Fontes externas: ruído atmosférico, galáctico e ruído provocado pelo homem;
- Fontes internas: flutuações espontâneas de corrente ou tensão em circuitos elétricos;
 - Ruído Impulsivo: Resulta da natureza discreta da corrente;
 - Ruído Térmico: Resulta do movimento aleatório de elétrons em um condutor.

Modelo Equivalente de Ruído Térmico



$$E[V_{TN}^2] = 4kTR\Delta f (\text{Volts})^2$$

k – Constante de Boltzmann

($k = 1,38 \times 10^{-23}$ Joules/K)

T – Temperatura em K

R – Resistência em Ohms

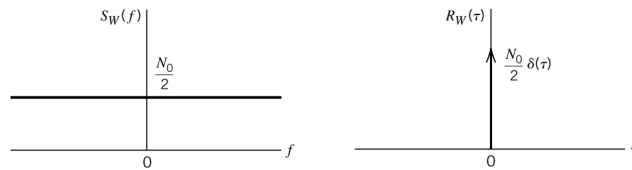
Δf – Largura de banda em Hz

Notes

Notes

Ruído Branco

Ruído Branco: Forma idealizada cuja densidade espectral de potência é independente da frequência de operação



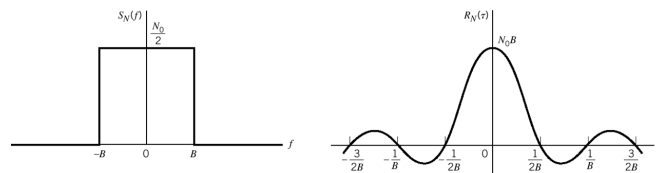
Temperatura equivalente de ruído do receptor ($N_0 = kT_e$)

Temperatura na qual um resistor ruidoso tem de ser mantido a fim de que, conectando-se o resistor à entrada de uma versão sem ruído, ele produza a mesma potência disponível de ruído na saída do sistema que a produzida por todas as fontes de ruído do sistema real.

Figura de Ruído: $F = \frac{T + T_e}{T}$ (medida com entrada casada e com a fonte de ruído à temperatura T).

Notes

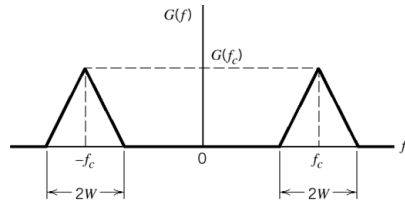
Exemplo: Ruído na saída de um filtro passa-baixas ideal



$$S_N(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & -B < f < B \\ 0, & |f| > B \end{cases} \quad R_N(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = N_0B \text{sinc}(2B\tau)$$

Notes

$g(t) \rightarrow$ sinal de banda estreita ou sinal passa-faixa,



$g(t) = \Re[\tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t)]$, onde $\tilde{g}(t) \rightarrow$ Envoltória Complexa de $g(t)$

$\tilde{g}(t) = g_I(t) + jg_Q(t) \Rightarrow g(t) = g_I(t) \cos(2\pi f_c t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$ onde,

$g_I(t)$: componente em fase
 $g_Q(t)$: componente em quadratura
 } Sinais passa-baixas de valor real.

Notes

Transformada de Hilbert

$$g(t) \Leftrightarrow \hat{g}(t)$$

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Transformada de Hilbert: Desloca os ângulos de fase de todos os componentes de frequência de um determinado sinal em ± 90 graus.

Notar que $\hat{g}(t)$ é a convolução de $g(t)$ com a função $\frac{1}{\pi t}$.

Sabendo que $\frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(f)$,

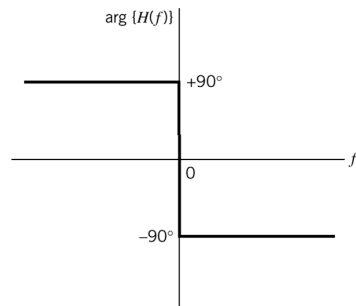
$$\Rightarrow \hat{G}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) G(f).$$

Notes

Característica de Fase de um Transformador de Hilbert

$\hat{G}(f) = -j\text{sgn}(f)G(f) \Rightarrow$ pode-se obter $\hat{g}(t)$ fazendo-se passar $g(t)$ por um sistema com função de transferência

$$H(f) = -j\text{sgn}(f) :$$



Algumas propriedades da Transformada de Hilbert

- 1 $g(t)$ (real) e $\hat{g}(t)$ têm o mesmo espectro de magnitude;
- 2 Se $\hat{g}(t)$ é a T.H de $g(t)$, então a T.H de $\hat{g}(t)$ será $-g(t)$;
- 3 $g(t)$ e $\hat{g}(t)$ são ortogonais ao longo do intervalo $(-\infty, \infty)$,

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\hat{g}(t) dt = 0.$$

Notes

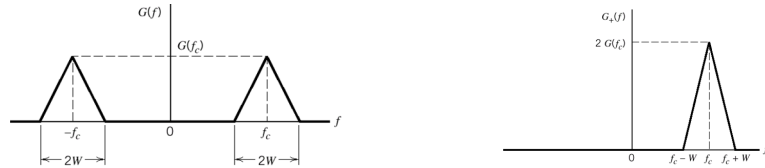
Notes

Envoltória Complexa

Definir: $g_+(t) = g(t) + j\hat{g}(t) \rightarrow$ pré-envoltória ou sinal analítico.

No domínio da frequência: $G_+(f) = G(f) + \text{sgn}(f)G(f)$,

$$\Rightarrow G_+(f) = \begin{cases} 2G(f), & 0 < f, \\ G(0), & f = 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases}$$



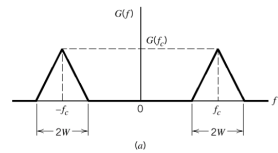
Pré-envoltória na forma polar:

$$g_+(t) = \tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t) \Rightarrow \tilde{g}(t) = g_+(t) \exp(-j2\pi f_c t)$$

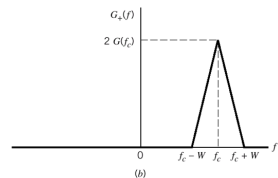
Lembrando que: $x(t) \exp(j2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f - f_c)$,

Notes

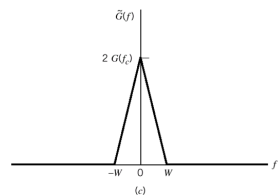
Envoltória Complexa



(a) Espectro de magnitude de $g(t)$



(b) Espectro de magnitude da pré-envoltória $g_+(t)$

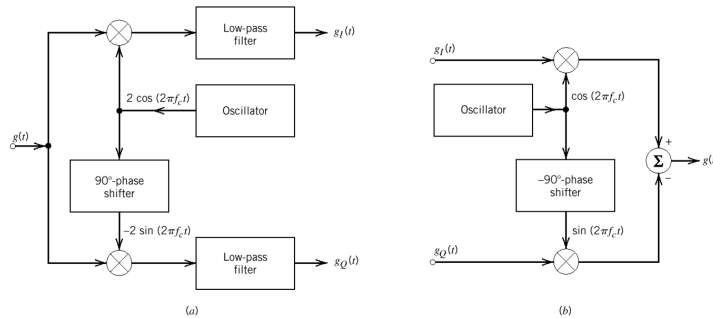


(c) Espectro de magnitude da envoltória complexa $\tilde{g}(t)$

Notes

Representação Canônica de Sinais Passa-Faixa

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \Re[\tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t)] \\
 &= \Re \{ [g_I(t) + jg_Q(t)] \exp(j2\pi f_c t) \} \\
 &= \Re \{ [g_I(t) + jg_Q(t)] [\cos(2\pi f_c t) + j \sin(2\pi f_c t)] \} \\
 &= g_I(t) \cos(2\pi f_c t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_c t).
 \end{aligned}$$



Evelio M. G. Fernández TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

Notes

Formas Lineares de Modulação

$$\tilde{g}(t) = g_I(t) + jg_Q(t) = a(t) \exp[\phi(t)],$$

$a(t)$ e $\phi(t) \rightarrow$ funções passa-baixas de valor real.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow g(t) &= \Re[\tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t)] = \Re[a(t) \exp(j[2\pi f_c t + \phi(t)])] \\
 &= a(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)].
 \end{aligned}$$

Modulação de Amplitude: Informação transportada pela envoltória da portadora de RF:

$$a(t) = |\tilde{g}(t)| = \sqrt{g_I^2(t) + g_Q^2(t)}.$$

Modulação de Fase: Informação transportada pela fase da portadora de RF:

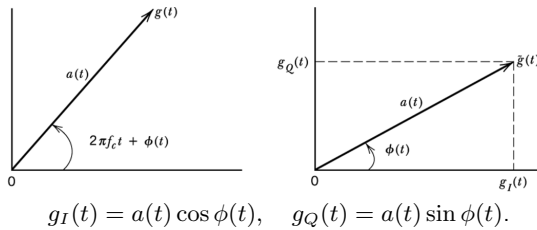
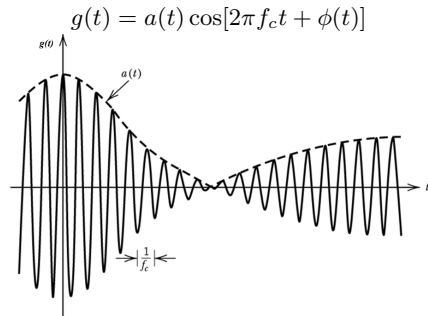
$$\phi(t) = \arctan \left[\frac{g_Q(t)}{g_I(t)} \right] = \Im(\ln[\tilde{g}(t)]).$$

Modulação de Frequência: Informação transportada pela diferença entre o valor da frequência instantânea da portadora de RF modulada e o valor da frequência portadora, f_c :

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\arctan \left[\frac{g_Q(t)}{g_I(t)} \right] \right).$$

Notes

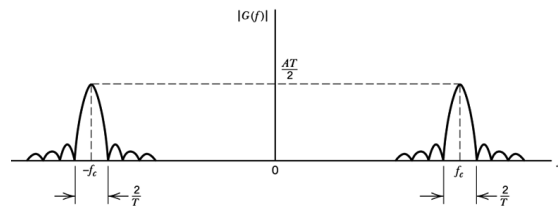
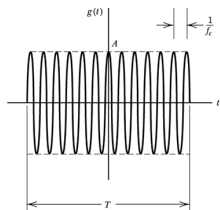
Sinais Passa-Faixas e Envoltória Complexa



Notes

Exemplo: Pulso de RF

$$g(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_c t)$$

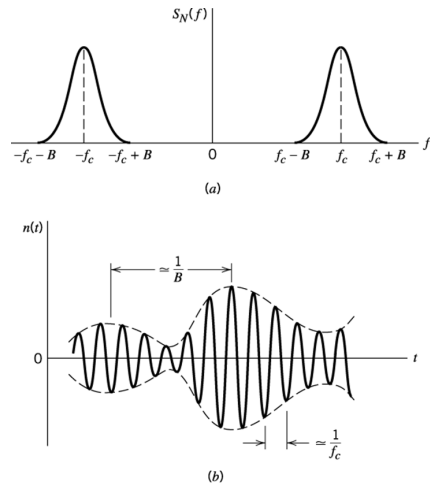


$$g(t) = \Re[\tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t)] = \Re \left[\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \exp(j2\pi f_c t) \right]$$

$$\tilde{g}(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right), \quad a(t) = |\tilde{g}(t)| = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Notes

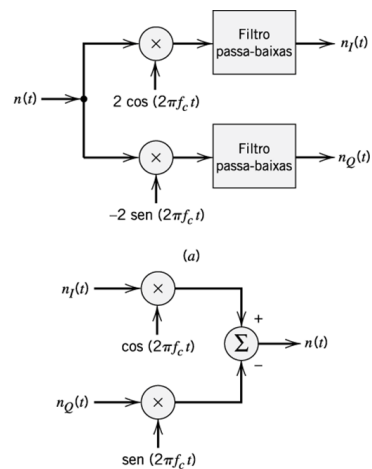
Ruído de Banda Estreita



$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Notes

Ruído de Banda Estreita: Componentes em Fase e Quadratura



Notes

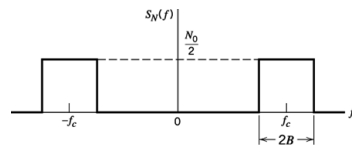
Propriedades de $n_I(t)$ e $n_Q(t)$

- 1 $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ têm valor médio igual a zero.
- 2 Se $n(t)$ for Gaussiano, então $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ serão conjuntamente Gaussianas.
- 3 Se $n(t)$ for estacionário, então $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ serão conjuntamente estacionárias.
- 4 $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ têm a mesma densidade espectral de potência dada por

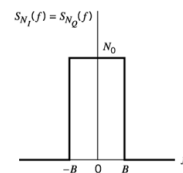
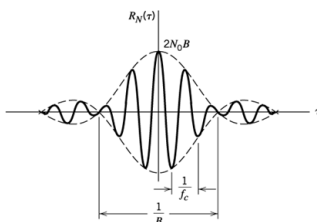
$$S_{N_I}(f) = S_{N_Q}(f) \begin{cases} S_N(f - f_c) + S_N(f + f_c), & -B < f < B \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- 5 $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ têm a mesma variância que o ruído de banda estreita $n(t)$.
- 6 Se $n(t)$ for Gaussiano, e $S_N(f)$ for simétrica em relação à frequência f_c , então $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ serão estatisticamente independentes.

Notes

Exemplo: Ruído Branco Processado por um Filtro Passa-Faixa Ideal



$$\begin{aligned} R_N(\tau) &= \int_{-f_c-B}^{-f_c+B} \frac{N_0}{2} \exp(j2\pi f\tau) df + \int_{f_c-B}^{f_c+B} \frac{N_0}{2} \exp(j2\pi f\tau) df \\ &= N_0 B \text{sinc}(2B\tau) [\exp(-j2\pi f_c\tau) + \exp(j2\pi f_c\tau)] \\ &= 2N_0 B \text{sinc}(2B\tau) \cos(2\pi f_c\tau). \end{aligned}$$



$$R_{N_I}(\tau) = R_{N_Q}(\tau) = 2N_0 B \text{sinc}(2B\tau)$$

Notes

Ruído de Banda Estreita: Envoltória e Fase

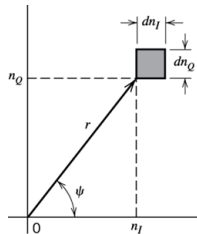
$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) = r(t) \cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

onde,

$$r(t) = \sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)}, \quad \psi(t) = \tan^{-1} \left[\frac{n_Q(t)}{n_I(t)} \right]$$

$n_I(t)$ e $n_Q(t)$ num instante $t \rightarrow$ amostras de V.A.s Gaussianas independentes, N_I e N_Q , de média zero, variância σ^2 e pdf conjunta dada por:

$$f_{N_I, N_Q}(n_I, n_Q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{n_I^2 + n_Q^2}{2\sigma^2}\right)$$



A probabilidade de N_I e N_Q situarem-se conjuntamente dentro da área sobreada é:

$$f_{N_I, N_Q}(n_I, n_Q) dn_I dn_Q = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{n_I^2 + n_Q^2}{2\sigma^2}\right) dn_I dn_Q$$

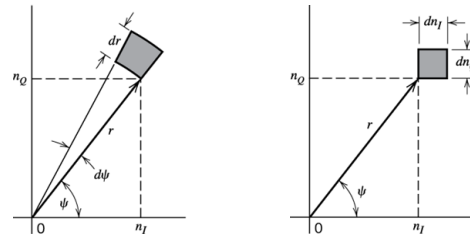
Notes

Ruído de Banda Estreita: Envoltória e Fase

Definindo a transformação,

$$n_I = r \cos \psi, \quad n_Q = r \sin \psi$$

No limite $\rightarrow dn_I dn_Q = r dr d\psi$



Sejam agora R e Ψ as V.A.s resultantes da observação (no mesmo tempo t) dos processos representados $r(t)$ e $\psi(t)$. Então, a probabilidade de R e Ψ situarem-se conjuntamente dentro da área sobreada é:

$$\frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr d\psi$$

$$\Rightarrow f_{R, \Psi}(r, \psi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

Notes

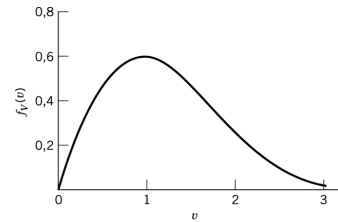
$$f_{R,\Psi}(r,\psi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_{\Psi}(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \psi \leq 2\pi, \\ 0, & \text{fora} \end{cases}, \quad f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), & r \geq 0, \\ 0, & \text{fora} \end{cases}$$

Sejam

$$v = \frac{r}{\sigma}, \quad f_V(v) = \sigma f_R(r)$$

$$\Rightarrow f_V(v) = \begin{cases} v \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right), & v \geq 0, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$



Distribuição de Rayleigh normalizada

Notes

Notes
